Естественные науки

УДК 514.76

О ЦЕНТРИРОВАНИИ СЕМЕЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ В МНОГОМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.Т. Ивлев, Е.А. Молдованова

Томский политехнический университет
E-mail: eam7@front.ru

Проводится аналитическое и геометрическое построение двух полей точек (центров) в соответствующих m-плоскостях p-мерного многообразия этих плоскостей в n-мерном евклидовом пространстве (1<p<(m+1)(n−m)).

1. Аналитический аппарат

Все функции, встречающиеся в данной статье, предполагаются аналитическими, а рассмотрения носят локальный характер.

Обозначения и терминология соответствуют принятым в [1–7].

1.1. Рассматривается p-мерное дифференцируемое многообразие M_p класса C^∞ (или C^ω) с базовыми формами θ^a ($a,b,c=\overline{1,p}$), удовлетворяющими структурным уравнениям:

$$D\theta^a=\theta^b\wedge\theta^a_b,\ D\theta^b_a=\theta^c_a\wedge\theta^b_c+\theta^c\wedge\theta^b_{ca},\ldots \tag{1.1}$$

Как известно [3] (см. теорему 3.2), с каждой точкой (u^a) многообразия M_p, где u^a – первые интегралы вполне интегрируемой системы форм θ^a, ассоциируется последовательность центроаффинных дифференциально-геометрических групп D_s (s=1,2,...) порядка s. Обозначим L_p пространство представлений группы D_1 и внесём в него центроаффинную структуру, т.е. будем его считать центроаффинным пространством, отнесённым к локальному центроаффинному реперу $\tilde{R}=\{\overline{B},\overline{\varepsilon_a}\}$, где

$$\delta\overline{B}=0,\ \delta\overline{\varepsilon}_a=\tilde{\theta}^b_a\overline{\varepsilon}_b,\ \tilde{\theta}^b_a=\theta^b_a\Big|_{\theta^c=0}.$$

1.2. Рассматривается n-мерное евклидово пространство E_n, отнесённое к подвижному ортонормальному реперу $R=\{\overline{A},\overline{e_i}\}$, ($i,j,k=\overline{1,n}$) с деривационными формулами и структурными уравнениями:

$$d\overline{A}=\omega^i\overline{e}_i,\ d\overline{e}_i=\omega^j_i\overline{e}_j,$$
$$D\omega^i=\omega^k\wedge\omega^i_k,\ D\omega^k_i=\omega^j_i\wedge\omega^k_j. \tag{1.2}$$

Здесь 1-формы ω^j_i удовлетворяют соотношениям

$$\omega^j_i+\omega^i_j=0, \tag{1.3}$$

вытекающим из условий ортонормальности репера R:

$$\langle\overline{e}_i;\overline{e}_j\rangle=\begin{cases}1, i=j,\\0, i\neq j.\end{cases} \tag{1.4}$$

Здесь символом $\langle\overline{x};\overline{y}\rangle$ обозначается скалярное произведение векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ пространства E_n.

1.3. Обозначим Q_N, где

$$N=(m+1)(n-m), \tag{1.5}$$

N-мерное грассманово дифференцируемое многообразие всех m-мерных плоскостей (m-плоскостей) l_m пространства E_n. К каждой m-плоскости $l_m\in Q_N$ присоединим ортонормальный репер R так, чтобы

$$l_m=(\overline{A},\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_m). \tag{1.6}$$

Здесь и в дальнейшем символом $l_q=(\overline{X},\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_q)$ обозначается q – плоскость пространства E_n, проходящая через точку X с радиус-вектором $\overline{X}$ и параллельная линейно независимым векторам $\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_q$ пространства E_n. Из (1.6) в силу (1.2) получаем, что 1-формы $\omega^{\hat{\alpha}}$, $\omega^{\hat{\alpha}}_\alpha$ ($\alpha,\beta,\gamma,\sigma=\overline{1,m}$; $\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma}=\overline{m+1,n}$) являются базовыми на многообразии Q_N, удовлетворяющими структурным уравнениям

$$D\omega^{\hat{\alpha}}=\omega^\alpha\wedge\omega^{\hat{\alpha}}_\alpha+\omega^{\hat{\beta}}\wedge\omega^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}},$$
$$D\omega^{\hat{\alpha}}_\alpha=\omega^\beta_\alpha\wedge\omega^{\hat{\alpha}}_\beta+\omega^{\hat{\beta}}_\alpha\wedge\omega^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}}. \tag{1.7}$$

1.4. Обозначим $R_{p,N}=(M_p,Q_N)$ расслоенное пространство с базой M_p и слоем Q_N, соответствующим каждой точке $B(u^a)\in M_p$. Заметим, что 1-формы θ^a, $\omega^{\hat{\alpha}}$ и $\omega^{\hat{\alpha}}_\alpha$ являются базовыми формами ($p+N$)-мерного дифференцируемого многообразия $R_{p,N}=M_p\times Q_N$, которые удовлетворяют структурным уравнениям (1.1) и (1.7). В расслоении $R_{p,N}$ зададим гладкое сечение: каждой точке $B(u^a)\in M_p$ поставим в соответствие вполне определённую m-плоскость $l_m\in Q_N$. Тогда в силу (1.1) и (1.7) дифференциальные уравнения этого сечения запишутся в виде:

$$\omega^{\hat{\alpha}} = A_a^{\hat{\alpha}}\theta^a, \omega_\alpha^{\hat{\alpha}} = A_{\alpha a}^{\hat{\alpha}}\theta^a = -\omega_{\hat{\alpha}}^{\alpha} = -A_{\hat{\alpha} a}^{\alpha}\theta^a. \quad (1.8)$$

Здесь величины $A_a^{\hat{\alpha}}$ и $A_{\alpha a}^{\hat{\alpha}}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\begin{gathered} dA_a^{\hat{\alpha}} - A_b^{\hat{\alpha}}\theta_a^b - A_{\alpha a}^{\hat{\alpha}}\omega^\alpha + A_a^{\hat{\beta}}\omega_{\hat{\beta}}^{\hat{\alpha}} = \tilde{A}_{ab}^{\hat{\alpha}}\theta^b, \tilde{A}_{[ab]} = 0, \\ dA_{\alpha a}^{\hat{\alpha}} - A_{\alpha b}^{\hat{\alpha}}\theta_a^b - A_{\beta a}^{\hat{\alpha}}\omega_\alpha^\beta + A_{\alpha a}^{\hat{\beta}}\omega_{\hat{\beta}}^{\hat{\alpha}} = A_{\alpha ab}^{\hat{\alpha}}\theta^b, A_{\alpha [ab]}^{\hat{\alpha}} = 0. \end{gathered} \quad (1.9)$$

Замечание 1.1. Из (1.4), (1.6) и (1.8) следует, что с каждой m-плоскостью $l_m \in Q_N$, отвечающей точке $B(u^a) \in M_p$ и являющейся векторным линейным евклидовым подпространством пространства E_n, натянутым на m линейно независимые векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_m$, ассоциируется ортонормальное $(n-m)$-мерное евклидово подпространство

$$F_{n-m} = \{\overline{e}_{m+1}, \overline{e}_{m+2}, \ldots, \overline{e}_n\}, \quad (1.10)$$

натянутое на линейно независимые векторы $\overline{e}_{m+1}, \overline{e}_{m+2}, \ldots, \overline{e}_n$ (как ортогональное дополнение векторного подпространства l_m).

Замечание 1.2. В данной статье будут рассматриваться поля геометрических образов многообразия S_p^m в E_n – секущей p-мерной поверхности расслоения $R_{p,N}$, которое является p-мерным семейством m-плоскостей l_m в E_n. Здесь и в дальнейшем с учётом (1.5) предполагается, что число p удовлетворяет неравенству

$$1 < p < N. \quad (1.11)$$

Замечание 1.3. Заметим, что величины $A_a^{\hat{\alpha}}$ и $A_{\alpha a}^{\hat{\alpha}}$, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям (1.9), образуют локальный внутренний фундаментальный геометрический объект

$$\Gamma_1 = \{A_a^{\hat{\alpha}}, A_{\alpha a}^{\hat{\alpha}}\} \quad (1.12)$$

первого порядка многообразия S_p^m в смысле Г.Ф. Лаптева [2].

2. Поля некоторых геометрических подобъектов объекта Γ_1

С помощью компонент геометрического объекта (1.12) на базе M_p расслоения $R_{p,N}$ рассмотрим следующие величины, которые с учётом (1.11) и (1.9) удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{gathered} A_{\alpha ab}^\beta = \frac{1}{2} A_{\alpha (a}^{\hat{\alpha}} A_{|\hat{\alpha}| b)}^\beta = A_{\beta ab}^\alpha, \quad A_{ba} = A_{ab} = A_{\alpha ab}^\alpha, \\ A_{ab}A^{ac} = \delta_b^c, \quad \det[A_{ab}] \neq 0, \end{gathered} \quad (2.1)$$

$$A_{ab}^\alpha = \frac{1}{2} A_{(a}^{\hat{\alpha}} A_{\hat{\alpha} b)}^\alpha, A^\alpha = A_{ab}^\alpha A^{ab}, \quad (2.2)$$

$$\begin{gathered} dA_{\alpha ab}^\beta + A_{\alpha ab}^\gamma \omega_\gamma^\beta - A_{\gamma ab}^\beta \omega_\alpha^\gamma - A_{\alpha cb}^\beta \theta_a^c - A_{\alpha ac}^\beta \theta_b^c = A_{\alpha abc}^\beta \theta^c, \\ dA_{ab} - A_{ac}\theta_b^c - A_{cb}\theta_a^c = A_{abc}\theta^c, \\ dA^{ab} + A^{cb}\theta_c^a + A^{ac}\theta_c^b = A_c^{ab}\theta^c, \end{gathered} \quad (2.3)$$

$$dA_\alpha^\beta + A_\alpha^\gamma \omega_\gamma^\beta - A_\gamma^\beta \omega_\alpha^\gamma = A_{\alpha c}^\beta \theta^c, \quad (2.4)$$

$$\begin{gathered} dA_{ab}^\alpha + A_{ab}^\beta \omega_\beta^\alpha - A_{cb}^\alpha \theta_a^c - A_{ac}^\alpha \theta_b^c - A_{\beta ab}^\alpha \omega^\beta = A_{abc}^\alpha \theta^c, \\ dA^\alpha - A^\beta \omega_\beta^\alpha - A_\beta^\alpha \omega^\beta = \tilde{A}_c^\alpha \theta^c, \end{gathered} \quad (2.5)$$

$$(\alpha, \beta, \gamma = \overline{1, m}; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma} = \overline{m+1, n}; a, b, c = \overline{1, p}).$$

Здесь явный вид величин, стоящих при θ^c, для нас несущественный.

Из (2.2–2.5) следует, что каждая из величин (2.1) образует соответствующие геометрические подобъекты в смысле [2] фундаментального геометрического объекта (1.12):

1. смешанный тензор
$$\{A_{\alpha ab}^\beta\}, \quad (2.6)$$
2. дважды ковариантный симметрический тензор
$$\{A_{ab}\}, \quad (2.7)$$
3. смешанный тензор второй валентности
$$\{A_\alpha^\beta\}, \quad (2.8)$$
4. основной геометрический подобъект
$$\{A^\alpha, A_\beta^\alpha\}. \quad (2.9)$$

Замечание 2.1. в следующем пункте будут рассматриваться геометрические образы, отвечающие точке $B(u^a) \in M_p$, которые определяются каждым из геометрических подобъектов (2.6–2.9).

3. Геометрические образы, ассоциированные с подобъектами геометрического объекта

3.1. Инвариантный гиперконус $K_{p-1} \subset L_p$

Кривую $k(t)$ на базе M_p, проходящую через точку $B(u^a) \in M_p$, будем задавать следующей параметрической системой дифференциальных уравнений:

$$\theta^a = t^a\theta, \quad D\theta = \theta \wedge \theta_1. \quad (3.1)$$

Здесь величины t^a с учётом (1.1) удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dt^a + t^b\theta_b^a = t_b^a\theta^b, \quad (a, b = \overline{1, p}).$$

Геометрически величины t^a определяют в центроаффинном пространстве L_p в точке $B(u^a) \in M_p$ направление

$$\overline{t} = (\overline{B}, \overline{\varepsilon}_a)t^a, \quad (3.2)$$

касательное к кривой $k(t)$ в точке $B(u^a)$.

Рассмотрим в $l_m \in S_p^m$ вектор

$$\overline{x} = x^\alpha \overline{e}_\alpha, \quad (3.3)$$

отвечающий точке $B(u^a) \in M_p$.

Из $d\overline{x} = (dx^\beta + x^\alpha \omega_\alpha^\beta)\overline{e}_\beta + x^\alpha \omega_\alpha^{\hat{\alpha}} \overline{e}_{\hat{\alpha}}$ в силу (1.8), (1.10) и (3.1) следует, что вектор

$$\overline{y} = y^{\hat{\alpha}} \overline{e}_{\hat{\alpha}}, y^{\hat{\alpha}} = x^\alpha A_{\alpha a}^{\hat{\alpha}} t^a \quad (3.4)$$

параллелен ортогональной проекции линейного векторного подпространства $T(\overline{r})_{k(t)} \cup l_m$ на векторное подпространство $(F_{n-m})_{\overline{r}}$. Здесь $T(\overline{r})_{k(t)}$ означает касательную к индикатрисе вектора $\overline{r} = \lambda\overline{x}$ вдоль кривой $k(t)$. Из (1.2), (1.4), (1.8), (3.1), (2.1) и (3.4) следует, что вектор

$$\overline{z} = z^\beta \overline{e}_\beta, z^\beta = x^\alpha A_{\alpha ab}^\beta t^a t^b \quad (3.5)$$

параллелен пересечению линейного векторного подпространства, натянутого на касательную к индикатрисе вектора $\overline{R}=\mu\overline{y}$ и векторное подпространство $(F_{n-m})_{\overline{R}}$, с подпространством l_m.

Таким образом, каждому направлению (3.2) в L_p отвечает симметрический линейный оператор векторного подпространства l_m на себя:

$$\Pi(t)=\{A^{\beta}_{\alpha ab}t^a t^b\}:l_m\to l_m. \tag{3.6}$$

Из (3.6) в силу (2.1) заключаем, что гиперконус $K_{p-1}\subset L_p$ второго порядка с вершиной $B(u^a)\in M_p$:

$$K_{p-1}:A_{ab}t^a t^b=0 \tag{3.7}$$

представляет собой совокупность всех направлений (3.2), которым отвечают линейные операторы $\Pi(t):l_m\to l_m$ с нулевыми следами. Можно показать, что в общем случае гиперконус K_{p-1} не вырождается в гиперконус по крайней мере с прямолинейной вершиной, проходящей через точку $B(u^a)\in M_p$, т.е. $\det[A_{ab}]\neq 0$ на базе M_p.

Замечание 3.1. Всюду в пункте 3 из рассмотрения исключаются фокальные кривые $k(t)$ на базе M_p, проходящие через точку $B(u^a)\in M_p$, для которых соответствующие точки в l_m являются фокусами в смысле [4].

3.2. Линейный оператор $\Pi:l_m\to l_m$

Из (3.2) и (3.6) с учётом (3.3) следует, что векторам $\overline{x}\in l_m$ и $\overline{v}=v^\alpha\overline{e}_\alpha\in l_m$, отвечающим точке $B(u^a)\in M_p$, соответствует в l_m гиперконус второго порядка с вершиной $B(u^a)$:

$$K_{p-1}(\overline{x},\overline{v})=\{t\in L_p:\Pi(t)\overline{x}\perp\overline{v}\}\Leftrightarrow\sum_{\beta=1}^{m}x^\alpha v^\beta A^{\beta}_{\alpha ab}t^a t^b=0. \tag{3.8}$$

Из (3.8) в силу (2.1) и (3.7) находим, что совокупность всех векторов $\overline{v}\in l_m$ таких, что гиперконусы $K_{p-1}(\overline{x},\overline{v})\subset L_p$ и $K_{p-1}\subset L_p$ аполярны в смысле [6] (т.е. каждое центроаффинное преобразование пространства, порождаемое этими гиперконусами, имеет нулевой след) образует в l_m линейное $(m-1)$-мерное подпространство

$$\Gamma_{m-1}(\overline{x})\Leftrightarrow\sum_{\beta=1}^{m}x^\alpha v^\beta A^{\beta}_{\alpha}=0,$$

отвечающее вектору $\overline{x}\in l_m$. Это подпространство ортогонально вектору $\overline{z}=x^\alpha A^{\beta}_{\alpha}\overline{e}_\beta\in l_m$. Таким образом, каждой точке $B(u^a)\in M_p$ отвечает симметрический линейный оператор

$$\Pi(t)=\{A^{\beta}_{\alpha}\}:l_m\to l_m, \tag{3.9}$$

переводящий вектор $\overline{x}\in l_m$ в вектор $\overline{z}\in l_m$. Можно показать, что в общем случае этот линейный оператор является невырожденным на базе M_q:

$$\det[A^{\beta}_{\alpha}]\neq 0. \tag{3.10}$$

3.3. Первое центрирование m-плоскости l_m

Рассмотрим в m-плоскости $l_m\in S^m_p$ точку X с радиус-вектором

$$\overline{X}=\overline{A}+x^\alpha\overline{e}_\alpha, \tag{3.11}$$

отвечающую точке $B(u^a)$ базы M_p расслоения $R_{p,N}$.

Как и в п. 3.1 (см. (3.1–3.5)) с учётом (2.1) и (1.8) находим, что точке $X\in l_m$ с радиус-вектором (3.11) будет отвечать вектор

$$\overline{u}=u^{\hat\alpha}\overline{e}_{\hat\alpha},\ u^{\hat\alpha}=(A^{\hat\alpha}_{a}+x^\alpha A^{\hat\alpha}_{\alpha a})t^a, \tag{3.12}$$

который параллелен вектору

$$\{T(X)_{k(t)}\cup l_m\}\cap(F_{n-m})_X. \tag{3.13}$$

Здесь $T(X)_{k(t)}$ означает касательную к линии, описываемой точкой X вдоль кривой $k(t)$ на базе M_p.

Из (3.11–3.13) в силу (2.1), (1.2) и (1.8) получаем вектор

$$\overline{z}=z^\beta\overline{e}_\beta\in l_m,\ z^\beta=(A^{\beta}_{ab}+x^\alpha A^{\beta}_{\alpha ab})t^a t^b, \tag{3.14}$$

который параллелен пересечению векторного подпространства l_m с векторным подпространством, натянутым на касательную к индикатрисе $\overline{r}=\lambda\overline{u}$ вдоль кривой $k(t)$ на базе M_p и на векторное подпространство $(F_{n-m})_X$. Из (3.14) заключаем, что каждой точке $X\in l_m$ с радиус-вектором (3.11) и вектору $\overline{v}=v^\alpha\overline{e}_\alpha$ в l_m отвечает в центроаффинном пространстве L_p гиперконус второго порядка с вершиной в точке $B(u^a)\in M_p$:

$$q_{p-1}(X,\overline{v})=\{t\in L_p:\overline{z}\perp\overline{v}\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v_\alpha(A^{\alpha}_{ab}+x^\beta A^{\alpha}_{\beta ab})t^a t^b=0\ (v_\alpha=v^\alpha). \tag{3.15}$$

Из (3.15) заключаем с учётом (2.1) и (3.7), что координаты x^α точки $X\in l_m$ такой, что гиперконусы $q_{p-1}(X,\overline{v})$ и $K_{p-1}(\overline{x},\overline{v})$ в L_p аполярны при любых $\overline{v}\in l_m$, удовлетворяют следующей системе линейных уравнений

$$x^\beta A^{\alpha}_{\beta}+A^{\alpha}=0,\ x^{\hat\beta}=0. \tag{3.16}$$

Из (3.10) заключаем, что система линейных уравнений (3.16) в общем случае имеет единственное решение относительно x^β, которое можно найти методом Крамера или Гаусса. Таким образом, справедлива теорема:

Теорема 3.1. Каждой точке $B(u^a)\in M_p$ в соответствующей m-плоскости $l_m\in S^m_p$ в случае, когда линейный оператор $\Pi(t):l_m\to l_m$ не вырождается, отвечает единственная точка $G_1\in l_m$ (первый центр) такая, что гиперконусы $q_{p-1}(X,\overline{v})$ и $K_{p-1}(\overline{x},\overline{v})$ аполярны при любых $\overline{v}\in l_m$.

4. Второе центрирование m-плоскостей $l_m\in S^m_p$

В этом пункте будет дано другое центрирование m-плоскостей $l_m\in S^m_p$, отличное от первого, проведённого в конце предыдущего пункта.

4.1. Распределение $\Delta_{2,p}$ на базе $M_p(2<p<N)$

Из (3.6) и (3.9) следует, что каждой точке $B(u^a)\in M_p$ в соответствующем центроаффинном пространстве L_p можно сопоставить гиперконус K^*_{p-1} второго порядка с вершиной $B(u^a)$ как совокупность всех таких направлений (3.2), которым отвечают линейные операторы $\Pi(t)=\Pi\cdot\Pi(t):l_m\to l_m$ с нулевыми следами. Этот гиперконус K^*_{p-1} определяется уравнением

$$K^{*}_{p-1}: B_{ab}t^{a}t^{b}=0, \qquad (4.1)$$

где симметрический тензор B_{ab} определяется по формулам:

$$B_{ab}=A^{\beta}_{\alpha}A^{\alpha}_{\beta ab}. \qquad (4.2)$$

Гиперконусы (4.1) и (3.7) порождают в точке $B(u^{a})\in M_{p}$ центроаффинное преобразование центроаффинного пространства L_{p}:

$$C=\{B^{b}_{a}\}, \qquad (4.3)$$

где смешанный тензор B^{b}_{a} с учётом (4.2) и (2.1) определяется по формулам:

$$B^{b}_{a}=B_{ac}A^{cb} \qquad (4.4)$$

и его компоненты в силу (2.2–2.5) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dB^{b}_{a}+B^{c}_{a}\theta^{b}_{c}-B^{b}_{c}\theta^{c}_{a}=B^{b}_{ac}\theta^{c}.$$

Здесь явный вид величин B^{b}_{ac} для нас несущественный.

Каждой точке $B(u^{a})\in M_{p}$ сопоставим двумерную плоскость в L_{p}:

$$L_{2}: t^{a_2}=h^{a_2}_{a_1}t^{a_1},\ (a_1,b_1=1,2;\ a_2,b_2=\overline{3,p}). \qquad (4.5)$$

Здесь с учётом (1.2) и в соответствии с [2] величины $h^{a_2}_{a_1}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dh^{a_2}_{a_1}+h^{b_2}_{a_1}\theta^{a_2}_{b_2}-h^{a_2}_{b_1}\theta^{b_1}_{a_1}+\theta^{a_2}_{a_1}=h^{a_2}_{a_1c}\theta^{c}. \qquad (4.6)$$

Заметим, что с заданием поля плоскостей (4.5) на базе M_{p} ассоциируется распределение $\Delta_{2,p}$:$B(u^{a})\to L_{2}$, которое определяется дифференциальными уравнениями (1.8) и (4.6).

Из (4.4) и (4.5) следует, что плоскость L_2 в каждой точке $B(u^{a})\in M_{p}$ будет неподвижной при центроаффинном преобразовании (4.3), т.е. $CL_2\| L_2$, тогда и только тогда, когда величины $h^{a_2}_{a_1}$ удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}\psi^{a_2}_{a_1}\equiv B^{b_1}_{b_2}h^{b_2}_{a_1}h^{a_2}_{b_1}+B^{a_2b_1}_{a_1b_2}h^{b_2}_{b_1}-B^{a_2}_{a_1}=0,\\ B^{a_2b_1}_{a_1b_2}=B^{b_1}_{a_1}\delta^{a_2}_{b_2}-B^{a_2}_{a_2}\delta^{b_1}_{a_1}.\end{gathered} \qquad (4.7)$$

Можно показать, что в общем случае на базе M_{p} определитель $L\equiv\det[B^{a_2b_1}_{a_1b_2}]$ не равен нулю. Здесь пара $\binom{b_1}{b_2}$ указывает на номер строки, а пара $\binom{a_1}{a_2}$ – на номер столбца. Неравенство нулю определителя L на M_{p} обеспечивает алгебраическую независимость уравнений (4.7) (относительно $h^{a_2}_{a_1}$), что и приводит к конечному числу решений относительно $h^{a_2}_{a_1}$. Заметим, что плоскость L_2, отвечающая точке $B(u^{a})\in M_{p}$, типа (4.7), которую мы будем называть главной, натянута на линейно независимую пару соответствующих (главных) направлений в L_{p}, неподвижных при преобразовании (4.3). Таким образом, на базе M_{p} инвариантным образом с помощью главной двумерной площадки L_2 определено (главное) распределение $\Delta_{2,p}$:$B(u^{a})\to L_2$, интегральные кривые которого на базе M_{p} в силу (4.5) определяются дифференциальными уравнениями:

$$\theta^{a_2}=h^{a_2}_{a_1}\theta^{a_1}. \qquad (4.8)$$

4.2. Аффинные преобразования m-плоскости $l_m\in S^{m}_{p}$, соответствующие её точкам

Из (3.11) с учётом (1.2) находим

$$d\overline{X}=\tilde{\omega}^{\alpha}\overline{e}_{\alpha}+\tilde{\omega}^{\hat{\alpha}}\overline{e}_{\hat{\alpha}}, \qquad (4.9)$$

где $\tilde{\omega}^{\alpha}=dx^{\alpha}+x^{\beta}\omega^{\alpha}_{\beta}+\omega^{\alpha}$, $\tilde{\omega}^{\hat{\alpha}}=\omega^{\hat{\alpha}}+x^{\alpha}\omega^{\hat{\alpha}}_{\alpha}$. (4.10)

Заметим с учётом (1.2) и (4.10), что 1-формы $\tilde{\omega}^{\alpha}$ и ω^{α}_{β} удовлетворяют структурным уравнениям:

$$D\tilde{\omega}^{\alpha}-\tilde{\omega}^{\beta}\wedge\omega^{\alpha}_{\beta}=\Omega^{\alpha},\ D\omega^{\alpha}_{\beta}-\omega^{\gamma}_{\beta}\wedge\omega^{\alpha}_{\gamma}=\Omega^{\alpha}_{\beta}, \qquad (4.11)$$

где $\Omega^{\alpha}=\omega^{\hat{\beta}}\wedge\omega^{\alpha}_{\hat{\beta}}+x^{\beta}\Omega^{\alpha}_{\beta}$, $\Omega^{\alpha}_{\beta}=\omega^{\hat{\alpha}}_{\beta}\wedge\omega^{\alpha}_{\hat{\alpha}}$. (4.12)

В соответствии с [5] и с учётом (1.10) и (4.1–4.12) заключаем, что каждой точке $X\in l_m$, соответствующей точке $B(u^{a})\in M_{p}$, отвечает аффинная связность $\Phi(X)$ как отображение соседней m-плоскости l'_m (бесконечно близкой первого порядка к l_m) на исходную l_m в направлении $(F_{n-m})_X$. При этом 1-формы $\tilde{\omega}^{\alpha}$ и ω^{α}_{β} являются формами этой связности, а 2-формы Ω^{α} и Ω^{α}_{β} являются формами кручения и кривизны. Обозначим $\hat{\Phi}(X)$ – ограничение связности $\Phi(X)$ на главное распределение $\Delta_{2,p}$. Тогда из (4.12) с учётом (1.8), (1.3) и (4.8) получаем, что компоненты тензора кручения $\overset{*}{R}{}^{\beta}$ и кривизны $R^{\beta}_{\alpha}=-R^{\alpha}_{\beta}$ связности $\hat{\Phi}(X)$ определяются по формулам

$$\begin{gathered}\overset{*}{R}{}^{\alpha}=R^{\alpha}+x^{\beta}R^{\alpha}_{\beta},\\ R^{\alpha}=R^{\alpha}_{12}+R^{\alpha}_{1b_2}h^{b_2}_{2}+R^{\alpha}_{2b_2}h^{b_2}_{1}+R^{\alpha}_{a_2b_2}h^{a_2}_{1}h^{b_2}_{2}, \qquad (4.13)\\ R^{\alpha}_{\beta}=R^{\alpha}_{\beta 12}+R^{\alpha}_{\beta 1b_2}h^{b_2}_{2}+R^{\alpha}_{\beta 2b_2}h^{b_2}_{1}+R^{\alpha}_{\beta a_2b_2}h^{a_2}_{1}h^{b_2}_{2}=-R^{\beta}_{\alpha},\end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered}\overset{*}{R}{}^{\alpha}_{ab}=R^{\alpha}_{ab}+x^{\beta}R^{\alpha}_{\beta ab},\\ R^{\alpha}_{\beta ab}=\frac{1}{2}A^{\alpha}_{\hat{\beta}[a}A^{\hat{\beta}}_{|\beta|b]}=-R^{\beta}_{\alpha ab},\ R^{\alpha}_{ab}=\frac{1}{2}A^{\alpha}_{[a}{}^{\hat{\alpha}}A^{\alpha}_{|\hat{\alpha}|b]},\\ (\alpha,\beta,\gamma=1,2;\ \hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma}=\overline{m+1,n};\\ a_1,b_1=1,2;\ a_2,b_2=\overline{3,p}).\end{gathered} \qquad (4.14)$$

В соответствии с [7] замечаем, что величины (4.13) каждой точке $B(u^{a})\in M_{p}$ сопоставляют аффинное преобразование m-плоскости $l_m\in S^{m}_{p}$ в себя:

$$\hat{\Phi}^{*}(X)=\{\overset{*}{R}{}^{\alpha};R^{\alpha}_{\beta}\}. \qquad (4.15)$$

4.3. Второй центр m-плоскости l_m

4.3.1. *m – чётное*

Имеет место следующая теорема

Теорема 4.1. В m-плоскости $l_m\in S^{m}_{p}$, отвечающей точке $B(u^{a})$ базы M_{p}, в общем случае при чётном m существует единственная точка G_2 (второй центр), которой соответствует аффинная связность $\hat{\Phi}(G_2)$ с нулевым кручением.

Доказательство. Из (4.13) с учётом (4.14) и (4.15) следует, что точке $G_2\in l_m$ будет соответствовать связность $\hat{\Phi}(G_2)$ с нулевым кручением $\overset{*}{R}{}^{\alpha}=0$ тогда и только тогда, когда её координаты x^{α} удовлетворяют системе линейных уравнений:

$$R^{\alpha} + x^{\beta} R^{\alpha}_{\beta} = 0. \qquad (4.16)$$

Здесь в силу (4.13) величины R^{α}_{β} кососимметричны по α и β. Можно показать с учётом (4.13) и (4.14), что при чётном m определитель порядка m

$$\det[R^{\beta}_{\alpha}] \qquad (4.17)$$

в общем случае на базе M_p не равен тождественно нулю. Поэтому систему линейных уравнений (4.16) можно однозначно разрешить относительно x^{β} по формулам Крамера или методом Гаусса. Теорема 4.2 доказана.

Замечание 4.1. Из теоремы 4.1 и (4.15) следует, что аффинное отображение $\hat{\Phi}^{*}(G_2)$ m-плоскости l_m на себя является центроаффинным преобразованием с центром в точке G_2.

4.3.2. *m – нечётное*

Теорема 4.2. В m-плоскости $l_m \in S^m_p$, отвечающей точке $B(u^a)$ базы M_p, в общем случае при нечётном m существует единственная (главная) прямая f, каждой точке F которой соответствует аффинная связность $\hat{\Phi}(F)$ с одним и тем же кручением.

Доказательство. Из (4.13) следует, что кручение связности $\hat{\Phi}(X)$ не будет зависеть от точки $X \in l_m$ тогда и только тогда, когда

$$\overset{*}{R}{}^{\alpha} = R^{\alpha} \Leftrightarrow x^{\beta} R^{\alpha}_{\beta} = 0. \qquad (4.18)$$

Так как m – нечётное и $R^{\beta}_{\alpha} = -R^{\alpha}_{\beta}$, то определитель (4.17) тождественно равен нулю. Поэтому $\mathrm{rang}[R^{\beta}_{\alpha}]$ в общем случае равен $m-1$ на базе M_p. Следовательно, однородная система линейных уравнений (4.18) определяет в l_m некоторую (главную) прямую f, о которой идёт речь в данной теореме. Теорема 4.2 доказана.

Замечание 4.2. Поскольку в общем случае $\mathrm{rang}[R^{\beta}_{\alpha}] = m-1$, то существует хотя бы один минор порядка $m-1$ этой матрицы, не равный нулю на базе M_p. Для определённости таким минором будем считать

$$\det[R^{\bar{\beta}}_{\bar{\alpha}}] \neq 0, (\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} = \overline{2, m}). \qquad (4.19)$$

Это даёт основание ввести в рассмотрение величины

$$\overset{*}{R}{}^{\bar{\beta}}_{\bar{\gamma}} R^{\bar{\gamma}}_{\bar{\alpha}} = R^{\bar{\beta}}_{\bar{\gamma}} \overset{*}{R}{}^{\bar{\gamma}}_{\bar{\alpha}} = \delta^{\bar{\beta}}_{\bar{\alpha}} \Rightarrow \overset{*}{R}{}^{\bar{\gamma}}_{\bar{\alpha}} = -\overset{*}{R}{}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\gamma}}. \qquad (4.20)$$

Поэтому из (4.18) получаем

$$x^{\bar{\beta}} = f^{\bar{\beta}} x^1, \qquad (4.21)$$

где

$$f^{\bar{\alpha}} = -R^{\bar{\beta}}_1 \overset{*}{R}{}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}}, \; f^{\bar{\alpha}} R^1_{\bar{\alpha}} = 0. \qquad (4.22)$$

Заметим с учётом (4.18–4.22), что прямая $f \in l_m$, о которой идёт речь в теореме 4.2, в параметрической векторной форме может быть записана так:

$$f : \bar{f} = \bar{A} + x^1 \bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon} = \bar{e}_1 + f^{\bar{\alpha}} \bar{e}_{\bar{\alpha}}. \qquad (4.23)$$

Теорема 4.3. На главной прямой $f \in l_m$, отвечающей точке $B(u^a) \in M_p$, в общем случае при нечётном m существует точка G_2 (второй центр) такая, что гиперконусы $q_{p-1}(G_2, \bar{\varepsilon})$ и K_{p-1} в L_p аполярны.

Доказательство. Из (4.23) и (3.15) следует, что точке $F \in f$ с радиус-вектором $\bar{F} = \bar{A} + x^1 \bar{\varepsilon}$ и вектору $\bar{\varepsilon} \| f$ отвечает в L_p гиперконус

$$q_{p-1}(F, \bar{\varepsilon}) : (C_{ab} + x^1 C_{1ab}) t^a t^b = 0, \qquad (4.24)$$

где симметрические по a и b величины C_{ab} и C_{1ab} определяются по формулам

$$\begin{aligned} C_{ab} &= A^1_{ab} + f_{\bar{\alpha}} A^{\bar{\alpha}}_{ab}, \\ C_{1ab} &= A^1_{1ab} + f^{\bar{\beta}} A^1_{\bar{\beta}ab} + f_{\bar{\alpha}} A^{\bar{\alpha}}_{1ab} + f^{\bar{\beta}} f_{\bar{\alpha}} A^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}ab}, (f_{\bar{\alpha}} = f^{\bar{\alpha}}). \end{aligned} \qquad (4.25)$$

Из (4.24) и (3.7) с учётом (2.1) получаем, что гиперконусы $q_{p-1}(F, \bar{\varepsilon})$ и K_{p-1} аполярны тогда и только тогда, когда

$$C + x^1 C_1 = 0, \qquad (4.26)$$

где

$$C = C_{ab} A^{ab}, C_1 = C_{1ab} A^{ab}. \qquad (4.27)$$

Можно показать с учётом (4.25) и (4.27), что в общем случае $C_1 \neq 0$ на базе M_p. Поэтому из (4.26) можно найти $x^1 = -CC_1^{-1}$ – координату второго центра G_2, не являющегося несобственной точкой, в случае нечётного m. Теорема 4.3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. – М.: ГИТТЛ, 1948. – С. 432.
2. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды московского математического общества. – М., 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
3. Лаптев Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Труды геометрического семинара. – М., 1966. – Т. 1 – С. 139–189.
4. Акивис М.А. Фокальные образы поверхностей ранга r // Известия вузов. Сер. Математика. – 1957. – № 1. – С. 9–19.
5. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техники. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1979. – С. 7–246.
6. Ивлев Е.Т. К геометрической интерпретации операции свертывания некоторых тензоров // Матер. итоговой научн. конф. по матем. и мех. за 1970 г. – Томск, 1970. – Т. 1 – С. 121–123.
7. Ивлев Е.Т. О тангенциально-вырожденных расслоениях $P_{m,n}$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. – Калининград: Калининградский ун-т, 1984. – Вып. 15. – С. 32–37.